Definice. Monáda je funktor $T : C \to C$ s přirozenými transformacemi $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ (násobení) a $\eta : 1_C \Rightarrow T$ (jednotka) takovými, že nasledující diagramy komutují:

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, Rightarrow, "\mu T"] \arrow[d, Rightarrow, "T\mu"] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, Rightarrow, "\eta T"] \arrow[d, Rightarrow, "T\eta"] \arrow[dr, equal, "\mathrm{id}_T"] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & T
\end{tikzcd}$$

Konstrukce. Pro adjunktní pár $F \dashv U$ je funktor UF monáda, s jednotkou z adjunkce $\eta : 1 \Rightarrow UF$ a násobením indukovaným kojednotkou $U\epsilon F : UFUF \Rightarrow UF$.

Úloha 1. Mějme volnou $\dashv$ zapomínající adjunkci mezi Set a Set_* (množinama s vyznačeným bodem), kde volný funktor přidá k množině bod. Popište výslednou monádu. (Tyhle monádě se v programování říká `Maybe` nebo `Option`.)

Definice. Algebra pro monádu T je morfizmus $a : TA \to A$ kompatibilní se strukturou monády ve smyslu, že nasledující diagramy komutují:

$$\begin{tikzcd}
T^2A \arrow[r, "Ta"] \arrow[d, "\mu_A"] & TA \arrow[d, "a"] \\
TA \arrow[r, "a"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, equal, "1_A"] & TA \arrow[d, "a"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

Úloha 2. Mějme volnou $\dashv$ zapomínající adjunkci Mon $\dashv$ Set mezi monoidy a množinami. Ukažte, že výslední monáda je dána funktorem

$$X \mapsto X^* := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^n$$

t.j. množina konečných uspořádáných sekvencí prvků X. Popište na něm explicitně strukturu monády. Ukažte, že algebry pro tuhle monádu jsou právě monoidy.

Úloha 3. Podobně ukažte pro adjunkci ComMon $\dashv$ Set, že výslední monáda je dána funktorem

$$X \mapsto X^*_S := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} (X^n)_{S_n}$$

t.j. množina konečných neuspořádáných sekvencí prvků X. Popište na něm explicitně strukturu monády. Ukažte, že algebry pro tuhle monádu jsou právě komutativní monoidy.

Úloha 4. Sformulujte a dokažte analogické tvrzení ohledně volné $\dashv$ zapomínající adjunkce pro grupy, komutativní grupy a vektorové prostory.

Úloha 5. Ukažte, že naopak, každá monáda pochází z volné $\dashv$ zapomínající adjunkce. Nechť $T : C \to C$ je monáda a C^T kategorie s objekty T-algebrami a morfizmy danými morfizmy $f : A \to A'$ v C takovými, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"] & TA' \arrow[d, "a'"] \\
A \arrow[r, "f"] & A'
\end{tikzcd}$$

Nechť F je funktor přiřazující A ‘volnou T-algebru’ $\mu_A : T^2A \to TA$ a U zapomínající funktor $(TA \xrightarrow{a} A) \mapsto A$. Ukažte, že tvoří adjungovaný pár. (Hint: definujte η a ϵ.)

Úloha 6. Ukažte, že pro monádu T na posetu (braném jako kategorii) platí $T^2 = T$ (zde se někdy nazývá *operátor uzávěru*). Popište monády z posetových adjunkcí z minulých cvičení.