

**Věta.** Právý adjunkt zachovává limity. Levý adjunkt zachovává kolimity.

**Úloha 1.** Z předešlého cvičení víme, že zapomínající funktor  $U : \text{ComGrp} \rightarrow \text{Grp}$  má levý adjunkt  $G \mapsto G/[G, G]$ . Má také pravý adjunkt?

**Úloha 2.** Uvažujte zapomínající funktor

$$U : \text{Grp} \rightarrow \text{Mon}$$

Popište jeho levý adjunkt  $L$  a pravý adjunkt  $R$ .

Co je hodnota  $L$  na monoidu s prvky  $\{0, 1\}$  a násobením  $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 = 1$ ?

**Úloha 3.** Zobecněte Úlohu 2 pro zapomínající funktor mezi malými grupoidy ('grupy s více objekty') a malými kategoriemi ('monoidy s více objekty').

**Úloha 4.** Dokažte pomocí pravého adjunktu  $R$  z Úlohy 2 a větě o zachovávání limit pro Eulerovu funkci  $\phi$  a nesoudělná přirozená čísla  $m, n$ , že platí  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ .

**Úloha 5.** Mějme pro funkci mezi množinami  $f : C \rightarrow D$ , o které uvažujeme jako o funktoru mezi kategoriemi bez netriviálních šipek, indukovanou restrikcí

$$\begin{aligned} f^* : \text{Set}^D &\rightarrow \text{Set}^C \\ \phi &\mapsto \phi \circ F \end{aligned}$$

Ukažte, že následující funktor je levým adjunktem  $f^*$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_f : \text{Set}^C &\rightarrow \text{Set}^D \\ \phi &\mapsto (d \mapsto \Sigma_{c \in f^{-1}(d)} \phi(c)) \end{aligned}$$

Ukažte, že následující funktor je pravým adjunktem  $f^*$ :

$$\begin{aligned} \Pi_f : \text{Set}^C &\rightarrow \text{Set}^D \\ \phi &\mapsto (d \mapsto \Pi_{c \in f^{-1}(d)} \phi(c)) \end{aligned}$$

**Úloha 6** (\*). Zkuste předešlou úlohu zobecnit pro kategorie  $C, D$  s netriviálními morfizmy. (Zde je potřeba vzít nějakou (ko)limitu místo pouhého (ko)součinu.)