Úloha 1. Uvažujte o inkluzi $I : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ jako o funktoru mezi kategoriemi posetů $(\mathbb{Z}, \leq)$ a $(\mathbb{R}, \leq)$. Popište jeho levý a pravý adjunkt.
Poznámka: S adjunkcí mezie posetama jste se již možná setkali. Jak ste ji říkali?

Úloha 2. Existuje četná kolekce příkladů adjukcí, kde jeden funktor 'zapomíná algebraickou strukturu' a funktor opačným směrem 'generuje volnou algebraickou strukturu', takovým adjunkcím se říká *free-forgetful adjunctions*. Příklady jsou

- $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Grp}$ (vytvoř volnou grupu) $\dashv U : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ (zapomeň strukturu grupy)
- $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}$ (vytvoř volný vektorový prostor) $\dashv U : \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}} \to \mathrm{Set}$ (zapomeň strukturu vetrového prostoru)
- $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{ComGrp}$ (vytvoř z grupy G komutativní grupu $G/[G,G]$) $\dashv U : \mathrm{ComGrp} \to \mathrm{Grp}$ (zapomeň, že grupa A je komutativní).

Ovšem, není pravda, že káždý 'zapomínající' funktor je pravým adjunktem.
Ukážte, že žádný z následujících funktorů

$$\mathrm{Field} \xrightarrow{U} \mathrm{Ring} \quad \mathrm{Field} \xrightarrow{U_+} \mathrm{ComGrp} \quad \mathrm{Field} \xrightarrow{U_\times} \mathrm{ComGrp} \quad \mathrm{Field} \xrightarrow{U} \mathrm{Set}$$

nemá levý (dokonce ani pravý) adjunkt.
Hint: Prozkoumejte morfismy z a do $\mathbb{Z}$.

Úloha 3. Nechť $U : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ a nechť F a H jsou oba jeho levé adjunkty. Ukažte, že potom existuje přirozený isomorfismus funktorů $F \cong H$. Duální výsledek platí pro pravé adjunkty.
Hint: Yonedovo vnoření je věrný a úplný funktor.

Úloha 4. Dokažte, že máme-následující diagram kategorií a adjungovaných funktorů

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend left, "U"] \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "G"]
\end{tikzcd}$$

tak potom $H \circ F \dashv U \circ G$.

Úloha 5. Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou kategie a pro funktory $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ platí $F \dashv G$.
Definujme kategorie úlpné podkategorie generováné objekty

$$\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} \mid \eta_A : A \xrightarrow{\sim} GFA\}$$

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \mid \varepsilon_B : FGB \xrightarrow{\sim} B\}$$

1. Ukážte, že $F(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{B}'$ a $G(\mathcal{B}') \subseteq \mathcal{A}'$.
2. Ukážte, že $F \restriction_{\mathcal{A}'}$ a $G \restriction_{\mathcal{C}'}$ jsou ekvivalence kategorií.

Jakou ekvivalenci dostaneme v případě

- $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{ComGrp} \dashv U : \mathrm{ComGrp} \to \mathrm{Grp}$

- $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mapsto V(S) = \{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = 0 \ \forall f \in S\}$
  $\dashv$
  $X \subseteq \mathbb{K}^n \mapsto I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : x \in X\}$

Úloha 6. Ukažte, že pokud existutí všechny limity $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$, je funktor limity pravým adjunktem ke funktoru

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{C} &\to \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \\ c &\mapsto (j \mapsto c) \end{aligned}$$

Sformulujte duální tvrzení pro kolimity.

Úloha 7. Nechť je daná adjunkce

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

Ukážte, že:

(a) složení s F a G definuje adjunktní pár

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \arrow[r, bend left, "F\circ"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D}^{\mathcal{J}} \arrow[l, bend left, "G\circ"] \end{tikzcd}$$

pro malou kategorii $\mathcal{J}$.

(b) předsložení s F a G definuje adjunktní pár

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J}^{\mathcal{C}} \arrow[r, bend left, "\circ F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{J}^{\mathcal{D}} \arrow[l, bend left, "\circ G"] \end{tikzcd}$$

pro lokálně malou kategorii $\mathcal{J}$.

Úloha 8 (Přirozenost v adjunkci)**.** Nechť $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ jsou funktory a pro každé $c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$ existuje bijekce $\mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$ (každému morfismu $f^* : Fc \to d$ jednoznačně přiřadí morfismus, $\overline{f} : c \to Gd$).
Ukážte, že přirozenost této bijekce je ekvivaletní tvrzení, že pro libovolné morfismy s doménami a kodoménami, jak je zobrazeno níže, platí, že

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "Fh"'] & d \arrow[d, "k"] & & c \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "h"'] & Gd \arrow[d, "Gk"] \\ Fc' \arrow[r, "g^*"'] & d' \arrow[r, phantom, "\leftrightsquigarrow"] & & c' \arrow[r, "\overline{g}"'] & Gd' \end{tikzcd}$$

levý čtverec komutuje v $\mathcal{D}$ právě tehdy když pravý čtverec komutuje v $\mathcal{C}$.