Konstrukce 1. Pro funktor $F : I \to \mathrm{Set}$ je jeho limitou *koherentní množina prvků* F, t.j.

$$\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(i) \mid Ff(x_i) = x_j \ \forall i, j \in I \ \forall f : i \to j\}$$

Kolimitou F je kvocient $\amalg_{i\in I} F(i)/\sim$, kde ekvivalence $\sim$ ztotožňuje prvky $x_i \sim Ff(x_i)$ $\forall i, j \in I \ \forall f : i \to j$.

Úloha 1. Rozmyslete si, že Konstrukce 1 splňuje univerzální vlastnost limity, resp. kolimity. Nahlédněte, že pro diagram množin $A_0 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_2 \hookrightarrow \dots$, kde $A_i \subseteq A_{i+1}$ a morfizmy jsou inkluze, je kolimitou sjednocení $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Úloha 2. Skonstruujte koprodukt v kategorii abelovských grup a v kategorii $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ vektorových prostorů nad $\mathbb{K}$. Sformulujte analogii Konstrukcte 1 pro tyhle kategorie.

Úloha 3. Nechť pro grupu G je BG korespondující kategorie s jedním objektem $*$. Akce G na množině X je dána funktorem $A : BG \to \mathrm{Set}$ s $A(*) = X$. Co je limita a kolimita A?
Co je limita a kolimita funktoru $R : BG \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$? (Zde se R nazývá *reprezentace* G, limita *invarianty* a kolimita *koinvarianty* reprezentace.)

Úloha 4. Mějme v kategorii abelovských grup diagram $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{p^3} \hookrightarrow \dots$ pro fixní prvočíslo p, kde každá inkluze je dána mapou $n \mapsto pn$. Popište kolimitu tohohle diagramu (nazývá se *Prüferova p-grupa*). Popište kolimitu sjednocení těhle diagramů pro všechny p.

Úloha 5. Ukažte, že jestli má kategorie I iniciální objekt i, pak pro každý funktor $F : I \to C$ je $F(i)$ jeho limitou. Duálně, jestli má terminální objekt j, pak je $F(j)$ jeho kolimitou.

Úloha 6. Uvažme kompozici $\mathrm{Hom}_C(a, F(-)) : I \xrightarrow{F} C \xrightarrow{\mathrm{Hom}(a,-)} \mathrm{Set}$ a její limitu

$$\begin{tikzcd}
& \lim \mathrm{Hom}_C(a, F(-)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Hom}_C(a, F(i)) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_C(a,F(j))"] & & \mathrm{Hom}_C(a, F(j))
\end{tikzcd}$$

Ukážte, že existuje bijekce množin $\lim \mathrm{Hom}_C(a, F(-)) \cong \mathrm{Cone}(a, F)$, přirozená v a. Nejprve rozmyslete bijekci, nechť $* \in \lim \mathrm{Hom}_C(a, F(-))$, čemu potom odpovídá

$$\begin{tikzcd}
& * \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Hom}_C(a, F(i)) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_C(a,F(j))"] & & \mathrm{Hom}_C(a, F(j))
\end{tikzcd} \quad ?$$

Úloha 7. Odvoďte, že $\mathrm{Hom}_C(a, -)$ zachovává limity.

Úloha 8. Nechť $G : C \to \mathrm{Set}$ je reprezentabilní, tj. $G \cong \mathrm{Hom}_C(a, -)$, pro nějaké $a \in C$. Ukážte, že G zachovává limity.

Úloha 9. Jaká je duální verze tvrzení '*$\mathrm{Hom}_C(a, -)$ zachovává limity*'?

Úloha 10. Všimněte si, že $\mathrm{Hom}_C(a, -)$ nemusí zachovávat kolimity. Nalezněte nějaký příklad.