Úloha 1. Ukážte, že nasledující funktory jsou reprezentovatelné:

(a) $\mathrm{ob} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Set}$, který malou kategorii $\mathcal{A}$ zobrazí na množinu $\mathrm{ob}\,\mathcal{A}$;

(b) $\mathrm{mor} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Set}$, který malou kategorii $\mathcal{A}$ zobrazí na množinu $\mathrm{mor}\,\mathcal{A}$;

Úloha 2. Pro každou grupu G a $x \in G$ existuje právě jeden grupový homomorfismus $\phi : \mathbb{Z} \to G$ takový, že $\phi(1) = x$. Potom $(\mathbb{Z}, 1)$ je univerzální dvojice pro zapomínající funktor $U : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ a tato dvojice definuje reprezentaci $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, -) \cong U$.
Na druhou stranu, stejnou vlastnost má také prvek $-1 \in \mathbb{Z}$.

1. Liší se reprezentace vznikle z univerzálních dvojic $(\mathbb{Z}, 1)$ a $(\mathbb{Z}, -1)$?

2. Existují dálší reprezentace U (dálší isomorfismy $U \cong \mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, -)$)? Pokud ano, jaké univerzální dvojice je indukují? Pokud ne, proč?

Úloha 3. Množina B^A funkcí z množiny A do množiny B reprezentuje kontravariantní funktor $\mathrm{Set}(- \times A, B) : \mathrm{Set}^{\mathsf{op}} \to \mathrm{Set}$. Univerzálním prvkem téhle reprezentace je funkce *evaluace*

$$\mathrm{ev} : B^A \times A \to B$$

Definujte funkci evaluace a popište její univerzální vlastnost.

Úloha 4. *Sierpińského prostor* $\mathcal{S}$ je topologický prostor na množině $\{0, 1\}$ s jedinou netriviální otevřenou množinou $\{1\}$.

(a) Ukažte, že $\mathcal{S}$ reprezentuje funktor $\mathcal{O} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ přiřazující topologickému prostoru jeho množinu otevřených množin.

(b) Ukažte, že $\mathcal{S}$ reprezentuje funktor $\mathcal{C} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ přiřazující topologickému prostoru jeho množinu uzavřených množin.

(c) Co jsou univerzální objekty pro tyhle reprezentace?

Úloha 5. Podle Yonedova lemmatu přirozené endomorfizmy kontravariantního funktoru potenční množiny $\mathcal{P} : \mathrm{Set}^{\mathsf{op}} \to \mathrm{Set}$ korespondují s endomorfizmy reprezentujícího objektu $\Omega = \{0, 1\}$. Popište přirozené endomorfizmy $\mathcal{P}$ korespondující s každým ze 4 prvků $\mathrm{Set}(\Omega, \Omega)$. Indukuje některá z těhle funkcí přirozený endomorfizmus kovariantního funktoru potenční množiny?