Úloha 1 (Ekvivalence malé a velké kategorie)**.** Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $\mathrm{Mat}_{\mathbb{F}}$ kategorie, jejíž objekty jsou přirozená čísla $\mathbb{N}$ a

$$\mathrm{Mat}_{\mathbb{F}}(m,n) = \{\text{matice velikosti } n \times m \text{ nad } \mathbb{F}\}.$$

Ukažte, že $\mathrm{Mat}_{\mathbb{F}}$ je ekvivalentní kategorii konečně rozměrných vektorových prostorů nad $\mathbb{F}$ a lineárních zobrazení. Součásti úlohy je také domyslet kompozici morfismů v kategorií $\mathrm{Mat}_{\mathbb{F}}$.

Úloha 2 (Přirozená bijekce vs “jenom” bijekce)**.** Nechť $\mathrm{Fin}^{\simeq}$ je grupoid konečných množin a bijekcí. Nechť $X \in \mathrm{Fin}^{\simeq}$, $\mathrm{Sym}(X)$ je množina všech bijekcí $X \to X$ a $\mathrm{Ord}(X)$ množina všech lineárních uspořádání na X.

1. Dodefinujte Sym a Ord tak, aby tvořily funktory $\mathrm{Fin}^{\simeq} \to \mathrm{Set}$.
2. Ukážte, že neexistuje přirozená transformace $\tau : \mathrm{Sym} \to \mathrm{Ord}$.

   (*Hint*: Prozkoumejte podmínku přirozenosti pro nějakou množinu s malým počtem prvků a zjitěte, jak tím diagramem prochází identické bijektivní zobrazení.)
3. Ukažte, že existuje bijekce $\mathrm{Sym}(X) \cong \mathrm{Ord}(X)$, která není přirozená v X.

Lemma (Yoneda)**.** *Nechť C je lokálně malá kategorie, $F : C \to \mathrm{Set}$, $c \in C$, potom exituje bijekce*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_C(c,-), F) \cong Fc$$

přirozená v c a F. Tato bijekce přiřadí přirozené transformaci $\alpha : \mathrm{Hom}_C(c,-) \to F$ prvek $\alpha_c(\mathrm{id}_c) \in Fc$.

Úloha 3. Co říká ‘duální’ Yonedovo lemma (když dosadíme C^{op} místo C)?

Definice (Yonedovo vnoření)**.** Definujeme funktory

$$C \xrightarrow{\ y\ } \mathrm{Set}^{C^{op}} \qquad\qquad C^{op} \xrightarrow{\ y\ } \mathrm{Set}^{C}$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_C(-,c) \arrow[d, "f_*"'] \\ d \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_C(-,d) \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_C(c,-) \\ d \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_C(d,-) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

Obojím se říká ‘Yonedovo’ vnoření. (Ve skutečnosti to je “stejný” funktor.)

Úloha 4. Dobré cvičení je ukázat, že y je ve skutečnosti funktor. Udělejte to, pokud definice vypadá komplikovaně. Použijte Yonedovo lemma, abyste ukazali, že y je úplný a věrný.

Úloha 5. Dokážte pomoci Yonedova lemmatu následující tvrzení:

(a) *Každá řádková operace na maticích s n řádky je definována násobením nějakou maticí $n \times n$ zleva, konkrétně maticí získané provedením řádkové operace na matici identity.*

- (i) Uvažujme kategorii $\mathrm{Mat}_{\mathbb{F}}$. Jaký funktor F použijete, abyste získali všechny matice s n řádky?
- (ii) Interpretujte řádkové operace (násobení nenulovým prvkem, přičtení řádku, prohození řádků) jako přirozenou transformaci $F \Rightarrow F$. Ukážte, že vaše interpretace je opravdu přirozená transformace.
- (iii) Aplikujte Yonedovo lemma.

(b) *Každá grupa je izomorfní podgrupě permutační grupy.*

- (i) Uvažujme grupu G a odpovídající jednoprvkovou kategorii BG. Ukažte, že funktory $BG \to \mathrm{Set}$ odpovídají akci G na množině $F(*)$. Co jsou přirozené transformace mezi nimi?
- (ii) Obraz $*$ podle Yonedova vnoření je $\mathrm{Hom}_{BG}(*,-) : BG \to \mathrm{Set}$. Jaké množině a jaké akci odpovídá tento funktor?
- (iii) Čemu podle Yonedova lemmatu odpovídají přirozené tranformace $\mathrm{Hom}_{BG}(*,-) \Rightarrow F$?
- (iv) Odvoďte, že $G \cong \mathrm{Aut}_G(G) \leq \mathrm{Sym}(G)$, kde $\mathrm{Aut}_G(G)$ je grupa G-ekvivariantních automorfismů nosné množiny G.

Úloha 6. Charakterizujte monomorfismy v kategorii těles.