

Úloha 1. Dokažte charakterizaci krajních případů kategorie, která má jen 1 objekt, resp. nejvýše 1 morfismus mezi objekty:

- (i) Necht' pro monoid M je BM kategorie s jedním objektem $*$, morfizmy z $*$ do $*$ jsou prvky M a jejich skládání je dáno skládáním v M . Dokažte, že BM je kategorie a každá kategorie s jedním objektem je BM pro nějaký monoid M .
- (ii) Necht' $\leq$ je kvázispořádaní na P (angl. *preorder*, t. j. reflexivní a tranzitivní relace) a $\bar{P}$ je kategorie s $\text{ob}(\bar{P}) = P$ a morfismem mezi p a q právě tehdy, když $p \leq q$. Dokažte, že $\bar{P}$ je kategorie a každá kategorie s nejvýše jedním prvkem v každém Hom-setu dává kvázispořádaní na objektech.

Úloha 2. Ukažte, že

- (a) v kategorii monoidů a jejich homomorfismů jsou isomorfismy právě bijektivní homomorfismy;
- (b) v kategorii posetů a jejich homomorfismů **nejso** isomorfismy právě bijektivní homomorfismy.

Úloha 3. Dokažte, že jsou-li $\alpha: a \rightarrow b$ a $\beta: b \rightarrow c$ epimorfismy (v nějaké kategorii $\mathcal{K}$), pak je $\beta\alpha$ rovněž epimorfismus. Co kdyby α, β byly monomorfismy/sekce/retrakce/isomorfismy?

Úloha 4. Dokažte, že identické vnoření $\nu: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ je epimorfismem v kategorii **Ring** okruhů a okruhových homomorfismů.

Úloha 5. Ukažte, že pro libovolnou kategorii $\mathcal{K}$ existuje kategorie $\text{Arr}(\mathcal{K})$ (tzv. *arrow category* nebo *kategorie šípek*) definovaná následovně:

1. $\text{ob Arr}(\mathcal{K}) = \text{mor } \mathcal{K}$.
2. Morfismus mezi $\alpha: a \rightarrow b, \beta: c \rightarrow d \in \text{ob Arr}(\mathcal{K})$ je pár $(\gamma: a \rightarrow c, \delta: b \rightarrow d)$ morfismů takových, že $\beta \circ \gamma = \delta \circ \alpha$, což lze graficky znázornit tak, že diagram níže *komutuje*.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\gamma} & c \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ b & \xrightarrow{\delta} & d \end{array}$$

Diagramům, jejichž všechny orientované cesty se stejným začátkem a koncem se skládají do jednoho a téhož morfismu, říkáme *komutativní*.

Dodefinujte skládání morfismů v $\text{Arr}(\mathcal{K})$. Ověřte, že tato konstrukce splňuje definici kategorie.

Úloha 6. Dokažte, že následující podmínky pro morfismus jsou ekvivalentní:

- (i) je to retrakce,
- (ii) jeho obraz při aplikaci jakéhokoliv funktoru je epimorfismus.

(Nápověda: Použijte vhodný Hom-funktor.)

Úloha 7. Vymyslete funktor takový, že:

- (a) jeho obraz netvoří podkategorii;
- (b) nereflakuje isomorfismy;
- (c) je věrný, ale zobrazí dva odlišné morfismy na stejný morfismus.
- (d) je úplně věrný, ale nezobrazí monomorfismus na monomorfismus (nebo epimorfismus na epimorfismus).

Úloha 7. Ukažte, že úplně věrný funktor může na sekci zobrazit pouze sekci (a analogicky pro retrakce). Ukažte na příkladech, že úplnost ani věrnost nelze vynechat.

Úloha 8. Jaký je rozdíl mezi funktorem $\mathcal{K}^{op} \rightarrow \mathcal{H}$ a $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}^{op}$? Jaký je rozdíl mezi funktorem $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ a $\mathcal{K}^{op} \rightarrow \mathcal{H}^{op}$?